

5 Einführung in die Anwendung von Kugelfunktionen

5.1 Definition der Kugelfunktionen

Als *räumliche Kugelfunktionen vom Grad n* , $F(x, y, z)$, bezeichnet man homogene harmonische Polynome in x, y, z vom Grad n . Es gibt $2n+1$ linear unabhängige derartige Polynome. Wie bereits gesagt, ist eine Funktion $F(x, y, z)$ harmonisch, wenn sie der Laplace-Gleichung genügt:

$$\Delta F(x, y, z) = 0. \quad (5.1)$$

Eine Funktion $F(x, y, z)$ ist homogen vom Grad n in x, y, z , wenn gilt:

$$F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z). \quad (5.2)$$

In diesem Fall ist die Eulersche Gleichung erfüllt:

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = nF(x, y, z). \quad (5.3)$$

Man bestätigt diese Formel, wenn (5.2) beispielsweise nach t differenziert wird:

$$x \frac{\partial F(tx, ty, tz)}{\partial(tx)} + y \frac{\partial F(tx, ty, tz)}{\partial(ty)} + z \frac{\partial F(tx, ty, tz)}{\partial(tz)} = t^{n-1} \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}, \quad (5.4)$$

und $t = 1$ gesetzt wird.

5.2 Lösung der Laplace-Gleichung

Wie wir gesehen hatten, ist das Gravitationspotential V eine harmonische Funktion außerhalb der anziehenden Massen. Es genügt der Laplace-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung vom elliptischen Typ. Sie lautet in rechtwinklig kartesischen Koordinaten:

$$\Delta V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (5.5)$$

Führt man sphärische Polarkoordinaten r, ϑ, λ ein (Abb. 5.1),

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \lambda \\ \sin \vartheta \sin \lambda \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

so kann die Laplace-Gleichung in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\Delta V(r, \vartheta, \lambda) = r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (5.7)$$

Nimmt man an, die Laplace-Gleichung genüge dem folgenden Separationsansatz,

$$V(r, \vartheta, \lambda) = F(r)Y(\vartheta, \lambda), \quad (5.8)$$

dann erhält man nach Einsetzen dieses Lösungsansatzes und Division durch $F(r)Y(\vartheta, \lambda)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{F(r)} \left(r^2 \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial F(r)}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{1}{Y(\vartheta, \lambda)} \left(\frac{\partial^2 Y(\vartheta, \lambda)}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \lambda)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \lambda)}{\partial \lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

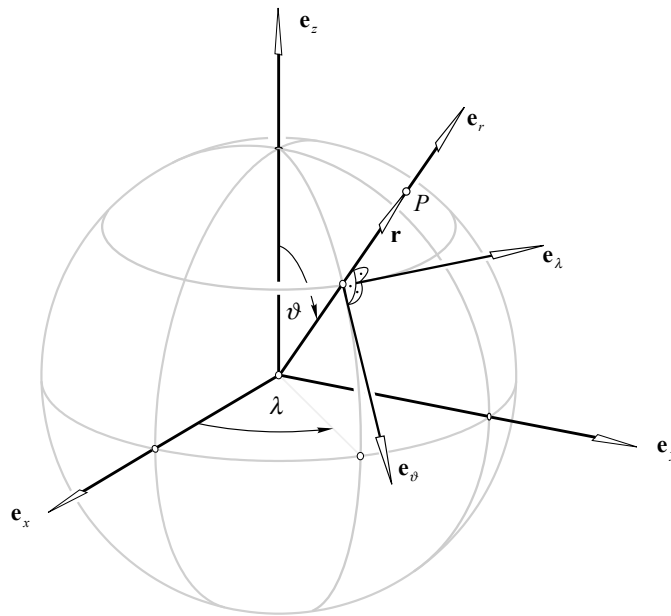


Abb. 5.1: Sphärische Polarkoordinaten.

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von r ab, während die rechte Seite lediglich eine Funktion von ϑ und λ ist. Das bedeutet, daß beide Seiten unabhängig voneinander sind, d.h., gleich einer Konstanten sein müssen. Als Konstante wählt man zunächst die ganze Zahl $n(n+1)$. Damit zerfällt die Gleichung (5.9) in zwei Differentialgleichungen. Eine erste enthält die radiale sphärische Polarkoordinate r :

$$r^2 \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial F(r)}{\partial r} - n(n+1)F(r) = 0. \quad (5.10)$$

Die zweite Differentialgleichungen enthält die sphärischen Polarkoordinaten ϑ und λ ,

$$\frac{\partial^2 Y(\vartheta, \lambda)}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial Y(\vartheta, \lambda)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y(\vartheta, \lambda)}{\partial \lambda^2} - n(n+1)Y(\vartheta, \lambda) = 0. \quad (5.11)$$

Es kann leicht nachgeprüft werden, daß die erste Gleichung die folgenden Lösungen hat,

$$F_1(r) = r^n \quad \text{und} \quad F_2(r) = r^{-(n+1)}. \quad (5.12)$$

Die Lösung der zweiten Gleichung ergibt sich über einen weiteren Separationsansatz:

$$Y(\vartheta, \lambda) = G(\vartheta)H(\lambda). \quad (5.13)$$

Nach Einsetzen dieses Lösungsansatzes und einigen Umformungen erhält man zunächst die folgende Gleichung:

$$\frac{\sin \vartheta}{G(\vartheta)} \left(\sin \vartheta \frac{\partial^2 G(\vartheta)}{\partial \vartheta^2} + \cos \vartheta \frac{\partial G(\vartheta)}{\partial \vartheta} + n(n+1) \sin \vartheta G(\vartheta) \right) = - \frac{\partial^2 H(\lambda)}{H(\lambda)}. \quad (5.14)$$

Auch hier sind beide Seiten unabhängig voneinander, d.h., beide Seiten müssen wiederum gleich einer Konstanten sein. Wir wählen als Konstante zunächst die ganze Zahl m^2 und erhalten auf diese Weise zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die **Legendresche Differentialgleichung** zur Lösung der Funktion $G(\vartheta)$,

$$\sin \vartheta \frac{d^2 G(\vartheta)}{d\vartheta^2} + \cos \vartheta \frac{dG(\vartheta)}{d\vartheta} + \left(n(n+1) \sin \vartheta - \frac{m^2}{\sin \vartheta} \right) G(\vartheta) = 0. \quad (5.15)$$

und eine weitere Differentialgleichung zur Lösung der Funktion $H(\lambda)$,

$$\frac{d^2 H(\lambda)}{d\lambda^2} + m^2 H(\lambda) = 0. \quad (5.16)$$

Die zweite Differentialgleichung zweiter Ordnung ist die wohlbekannte Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator. Die Lösungen lauten bekanntlich:

$$\begin{aligned} H(\lambda)_1 &= \cos m\lambda, \\ H(\lambda)_2 &= \sin m\lambda. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Es kann nun gezeigt werden, daß für Probleme der Potentialtheorie die Konstanten n und m ganze Zahlen sein müssen. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Grad:} \quad & n = 0, 1, 2, \dots \\ \text{Ordnung:} \quad & m = 0, 1, 2, \dots \text{ mit } m \leq n. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung sind die sog. **zugeordneten Legendreschen Funktionen** für die Indizes $n > 0$,

$$G(\vartheta) = P_n^m(\cos \vartheta). \quad (5.19)$$

Für die Indizes $m = 0$ ergeben sich Polynome in $\cos \vartheta$, die sog. **Legendreschen Polynome**. Die gesamte Lösung $Y(\vartheta, \lambda) = G(\vartheta)H(\lambda)$, geschrieben in der Form,

$$\left. \begin{aligned} C_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ S_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{aligned} \right\} := P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\lambda \\ \sin m\lambda \end{cases}. \quad (5.20)$$

werden als **Kugelflächenfunktionen vom Grad n und der Ordnung m** bezeichnet. Die vollständige Lösung der Laplace-Gleichung ist die Linearkombination aller speziellen Lösungen. Man erhält eine erste Lösung,

$$V_1(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n (c_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\lambda + s_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\lambda). \quad (5.21)$$

und eine zweite Lösung,

$$V_2(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (c_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\lambda + s_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\lambda). \quad (5.22)$$

mit zunächst willkürlich zu wählenden Integrationskonstanten c_{nm} und s_{nm} . Die erste Lösung konvergiert im leeren Innenraum einer Massenverteilung; die zweite Lösung konvergiert im leeren Außenraum einer Massenordnung. Der letzte Fall ist von besonderer Bedeutung für die Darstellung des Gravitationspotentials im Außenraum der Erde. Es sei noch angemerkt, daß alle harmonischen Funktionen durch Reihenentwicklungen dieses Typs dargestellt werden können.

5.3 Quellendarstellung des Gravitationspotentials

Die Entfernung l zwischen zwei Punkten,

$$P(\mathbf{r}) = P(r, \vartheta, \lambda) \quad \text{und} \quad Q(\mathbf{r}') = Q(r', \vartheta', \lambda'), \quad (5.23)$$

kann mit Hilfe sphärischer Polarkoordinaten folgendermaßen geschrieben werden

$$l = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}. \quad (5.24)$$

ψ ist der Winkel zwischen den Ortsvektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' . Der reziproke Abstand $1/l$ kann nun in eine konvergente Reihe nach Potenzen von r/r' geschrieben werden, wenn $r < r'$ gilt, bzw. in eine konvergente Reihe nach Potenzen von r'/r , wenn $r' < r$ gilt (Abb. 5.2):

■ für $r < r'$ mit

$$l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = r' \sqrt{1 - \left(2 \frac{r}{r'} \cos \psi - \left(\frac{r}{r'} \right)^2 \right)} \quad (5.25)$$

lautet die Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos \psi). \quad (5.26)$$

■ für $r > r'$ mit

$$l = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'} = r \sqrt{1 - \left(2 \frac{r'}{r} \cos \psi - \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right)} \quad (5.27)$$

lautet die Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\psi). \quad (5.28)$$

Die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind Funktionen des Zwischenwinkels ψ . Es zeigt sich, daß diese Funktionen die **Legendreschen Polynome** sind. Drückt man den Winkel ψ in sphärische Polarkoordinaten der Ortsvektoren \mathbf{r} und \mathbf{r}' durch Anwendung des Seitenkosinussatzes der sphärischen Trigonometrie aus,

$$\cos\psi = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\lambda - \lambda'), \quad (5.29)$$

dann kann das **Additionstheorem der Legendreschen Polynome**, bzw. das **Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen** angewendet werden:

$$\begin{aligned} P_n(\cos\psi) &= P_n(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\lambda - \lambda')) = \\ &= \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (C_{nm}(\vartheta, \lambda) C_{nm}(\vartheta', \lambda') + S_{nm}(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta', \lambda')) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\text{mit dem Kronecker-Symbol } \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

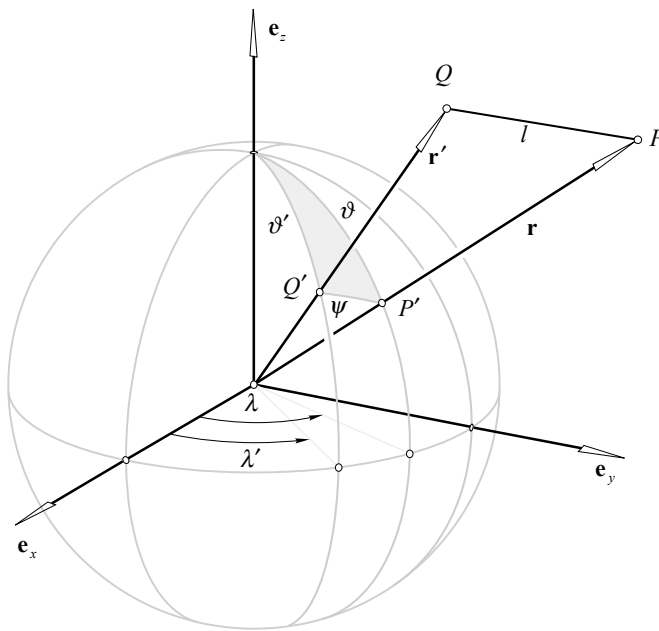


Abb. 5.2: Abstand l in sphärischen Polarkoordinaten.

Die Funktionen $C_{nm}(\vartheta, \lambda)$ und $S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ sind die bereits eingeführten Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m

$$\begin{aligned} C_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_n^m(\cos\vartheta) \cos m\lambda =: Y_{nm}^c(\vartheta, \lambda) \\ S_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_n^m(\cos\vartheta) \sin m\lambda =: Y_{nm}^s(\vartheta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.31)$$

und $P_n^m(\cos\vartheta)$ die **zugeordneten Legendreschen Funktionen**. Setzt man diesen Ausdruck in die Reihenentwicklungen von $1/l$ ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{l} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} K_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda) & r < r' \\ \sum_{n=-1}^{\infty} K_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda) & r > r' \end{cases} \quad \text{für} \quad . \quad (5.32)$$

Die Funktionen K_n bezeichnet man als **Kugelfunktionen des Grades n** . Die Funktionen $Y_n(\vartheta, \lambda)$ werden als **Laplacesche Kugelflächenfunktionen** des Grades n bezeichnet, dargestellt durch eine Linearkombination der $2n+1$ linear unabhängigen Kugelflächenfunktionen $Y_{nm}^{c,s}(\vartheta, \lambda)$ des Grades n und der Ordnung m , $0 \leq m \leq n$:

$$\begin{aligned} Y_n(\vartheta, \lambda) &= \sum_{m=0}^n (c_{nm} Y_{nm}^c(\vartheta, \lambda) + s_{nm} Y_{nm}^s(\vartheta, \lambda)) \\ &= \sum_{m=0}^n (c_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + s_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)), \end{aligned} \quad (5.33)$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_{nm} &= (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_{nm}(\vartheta', \lambda') \\ s_{nm} &= 2(1 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} S_{nm}(\vartheta', \lambda'). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Mit der Reihenentwicklung des reziproken Abstandes $1/l$ können nun auch die verschiedenen Gravitationspotentiale in Reihen nach Kugelfunktionen entwickelt werden. Als Beispiel soll dies für das Gravitationspotential eines ausgehnten Körpers getan werden. Setzt man die Reihenentwicklung von $1/l$ (Bedingung: $r'_{\max} < r$) in den Ausdruck für das Gravitationspotential des ausgehnten Körpers ein, so erhält man zunächst:

$$V = \frac{G}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') r'^n P_n(\cos\psi) d\Omega. \quad (5.35)$$

In dieser Gleichung erweitert man Zähler und Nenner mit einer Referenzlänge a und einer Referenzmasse M . Wegen der Konvergenz der Reihe können Summation und Integration vertauscht werden und man erhält folgende Formel für das Gravitationspotential eines ausgehnten Körpers,

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n Y_n(\vartheta, \lambda), \quad (5.36)$$

mit den Laplaceschen Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n P_n(\cos\psi) \rho(\mathbf{r}') d\Omega. \quad (5.37)$$

Setzt man das Additionstheorem der Legendreschen Polynome im Integranden ein, so erhält man einen weiteren Ausdruck für die (Laplaceschen) Kugelflächenfunktionen des Grades n ,

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (c_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + s_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)), \quad (5.38)$$

ausgedrückt durch die Kugelflächenfunktionen $C_{nm}(\vartheta, \lambda)$ und $S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ des Grades n und der Ordnung m . Die Reihenkoeffizienten c_{nm} und s_{nm} , die sog. Potentialkoeffizienten, können mittels folgender Integrale berechnet werden:

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{(2 - \delta_{0m})(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n C_{nm}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega, \\ s_{nm} &= \frac{2(1 - \delta_{0m})(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n S_{nm}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Wie wir später sehen werden, können die Potentialkoeffizienten, zumindest diejenigen niederen Grades, physikalisch durch vertraute Begriffe interpretiert werden. Es wird sich zeigen, daß sie als die Stokesschen Konstanten identifiziert werden können. Ein Vergleich der Formeln mit denen des Abschnittes 5.2 zeigt gewisse Ähnlichkeiten. Während hier die Reihenkoeffizienten aus Volumenintegralen berechnet werden können, haben sie dort jedoch die Bedeutung von Integrationskonstanten.

5.4 Entwicklung einer Funktion nach Kugelflächenfunktionen

Im letzten Abschnitt wurde das Gravitationspotential eines ausgedehnten Körpers durch eine Reihe nach Kugelfunktionen dargestellt. Kugelfunktionen setzen sich aus Kugelflächenfunktionen $Y_n(\vartheta, \lambda)$ und Funktionen zusammen, die ihr radiales Verhalten beschreiben:

$$K_n = \begin{cases} \frac{r^n}{r'^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda) & r < r', \\ \text{für} & \\ \frac{r'^n}{r^{n+1}} Y_n(\vartheta, \lambda) & r' < r. \end{cases} \quad (5.40)$$

Die Laplaceschen Kugelflächenfunktionen des Grades n , $Y_n(\vartheta, \lambda)$, können durch Linearkombination von Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m dargestellt werden (5.33),

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (c_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + s_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)).$$

Das System der Kugelflächenfunktionen $C_{nm}(\vartheta, \lambda)$ und $S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ bilden ein vollständiges, linear unabhängiges System von Basisfunktionen auf der Kugel. Irgendeine auf der Kugeloberfläche definierte Funktion $f(\vartheta, \lambda)$ (zumindest in einem sehr allgemeinen Sinne) kann in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden,

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv Y(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (5.41)$$

Nun stellt sich die Frage, wie die Reihenkoeffizienten c_{nm} und s_{nm} berechnet werden können. Hierfür sind die Orthogonalitätseigenschaften der Kugelflächenfunktionen von Bedeutung. Die Orthogonalitätsrelationen besagen, daß sich die Integrale der Produkte zweier verschiedener Kugelflächenfunktionen $Y_{nm}^c(\vartheta, \lambda) := C_{nm}(\vartheta, \lambda)$ oder $Y_{nm}^s(\vartheta, \lambda) := S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ über die Einheitskugel Φ zu Null ergeben (die Indizes σ, σ' sind entweder c oder s):

$$\iint_{\Phi} Y_{nm}^{\sigma}(\vartheta, \lambda) Y_{n'm'}^{\sigma'}(\vartheta, \lambda) d\Phi = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nm'} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad 0 < m \leq n$$

für

$$\iint_{\Phi} Y_{n0}^{\sigma}(\vartheta, \lambda) Y_{n'0}^{\sigma'}(\vartheta, \lambda) d\Phi = \frac{4\pi}{2n+1} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} (1 - \delta_{\sigma\sigma'}) \quad m = 0$$

$$\text{mit dem **Kronecker-Symbol** } \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases} \quad (5.42)$$

Die Berechnung der Reihenkoeffizienten c_{nm} und s_{nm} ist damit sehr einfach. Multipliziert man beide Seiten der Reihenentwicklung von $f(\vartheta, \lambda)$ mit einer bestimmten Kugelflächenfunktion $Y_{nm}^{\sigma}(\vartheta, \lambda)$ und integriert über die Einheitskugel Φ , so erhält man, z.B. für $\sigma \equiv c$,

$$c_{nm} \iint_{\Phi} (C_{nm}(\vartheta, \lambda))^2 d\Phi = \iint_{\Phi} C_{nm}(\vartheta, \lambda) f(\vartheta, \lambda) d\Phi, \quad (5.43)$$

weil alle Integrale außer dasjenige mit den Indizes $n = n', m = m'$ wegen der Orthogonalitätseigenschaften verschwinden. Auf diese Weise kann der Reihenkoeffizient c_{nm} berechnet werden. Das Integral auf der linken Seite der Gleichung kann gemäß der Orthogonalitätsrelationen ermittelt werden. Die weiteren Reihenkoeffizienten ergeben sich auf analoge Weise. Das Ergebnis lautet:

$$c_{nm} = \frac{1}{4\pi} (2 - \delta_{0m}) (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') C_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi, \quad (5.44)$$

$$s_{nm} = \frac{1}{2\pi} (1 - \delta_{0m}) (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') S_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi.$$

Die Laplaceschen Kugelflächenfunktionen $Y_n(\vartheta, \lambda)$ können direkt durch Auswertung der Integrale

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \frac{(2n+1)}{4\pi} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') P_n(\cos\psi) d\Phi \quad (5.45)$$

berechnet werden. (ψ ist die sphärische Distanz, definiert wie im letzten Abschnitt). Man beweist diese Formel, indem im Integranden für $P_n(\cos\vartheta)$ das Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen (5.30) eingesetzt wird. Mit Hilfe der Formel (5.44) ergibt sich die Formel (5.33) für die Laplaceschen Kugelflächenfunktionen vom Grad n . Die Reihenkoeffizienten c_{nm} und s_{nm} stellen die spektralen Amplituden oder das Spektrum der Funktion $f(\vartheta, \lambda)$ mit den spektralen Frequenzen, definiert durch den Grad n und der Ordnung m des Systems der Basisfunktionen dar.

5.5 Zusammenhänge zwischen den Darstellungen

5.5.1 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse der Kapitel 5.2 bis 5.4 zusammenfassend betrachtet und Verbindungen zwischen den einzelnen Darstellungen hergestellt werden. Das Strukturdiagramm der Abb. 5.4 faßt die Ergebnisse der vorangehenden Abschnitte zusammen. In allen drei Abschnitten wurden Reihenentwicklungen der Potentialfunktion des Gravitationsfeldes nach Kugel- bzw. Kugelflächenfunktionen behandelt. Zunächst wurde im Abschnitt 5.2 die allgemeine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung als Linearkombination spezieller Lösungen, nämlich der Kugelfunktionen gewisser Grade und Ordnungen erhalten. Für die Faktoren der Linearkombination können in diesem Lösungsansatz beliebige Zahlen eingesetzt werden – alle möglichen Kombinationen erfüllen die Laplacesche Differentialgleichung. Diese Zahlen können aber eindeutig berechnet werden, wenn die Dichteverteilung eines gravitierenden Körpers bekannt ist. Dies wurde im Abschnitt 5.3 gezeigt. Man kann diese Methode als direkte Methode zur Bestimmung der Potentialkoeffizienten bezeichnen. Schließlich wurde im Abschnitt 5.4 eine weitgehend beliebige Funktion auf einer Kugeloberfläche nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. Die Reihenoeffizienten können ebenfalls mit Hilfe der als bekannt vorausgesetzten Funktion auf der Kugeloberfläche durch Oberflächenintegrale berechnet werden. Nimmt man an, diese Funktion beschreibt das Potential auf der Kugeloberfläche, so hat man mit dieser Reihenentwicklung eine weitere Darstellung des Gravitationspotentials gewonnen. Auch diese Aufgabe kann im Sinne eines direkten Problems gelöst werden. Allerdings beschränkt sich diese Darstellung auf die Kugeloberfläche.

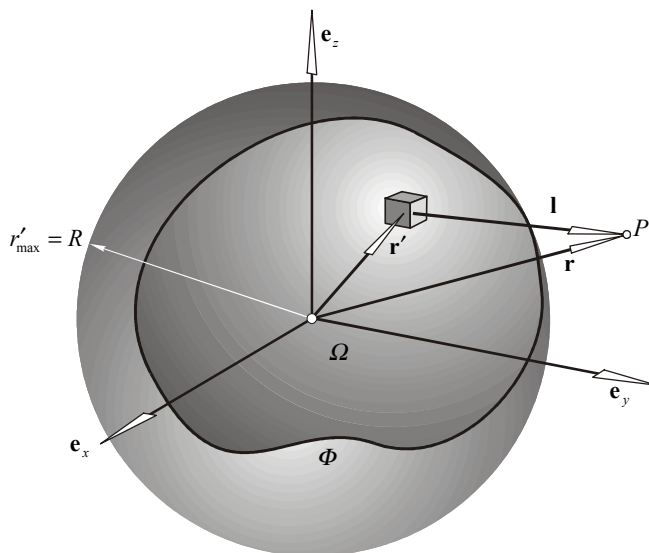


Abb. 5.3: Direktes und inverses Problem.

Nun stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang dieser drei Darstellungen. Insbesondere liegt es nahe, zu fragen, wie die unbekanntenen Potentialkoeffizienten der Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung bestimmt werden können. Nimmt man an, man kennt die Potentialfunktion auf der Kugeloberfläche mit einem gewissen Radius R (Abb. 5.3), so müssen die Entwicklungskoeffizienten dieser Funktion in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen in direktem Zusammenhang mit denen stehen, die sich ergeben, wenn man den Radius der Kugel in die Lösung der Laplace-Gleichung einsetzt.

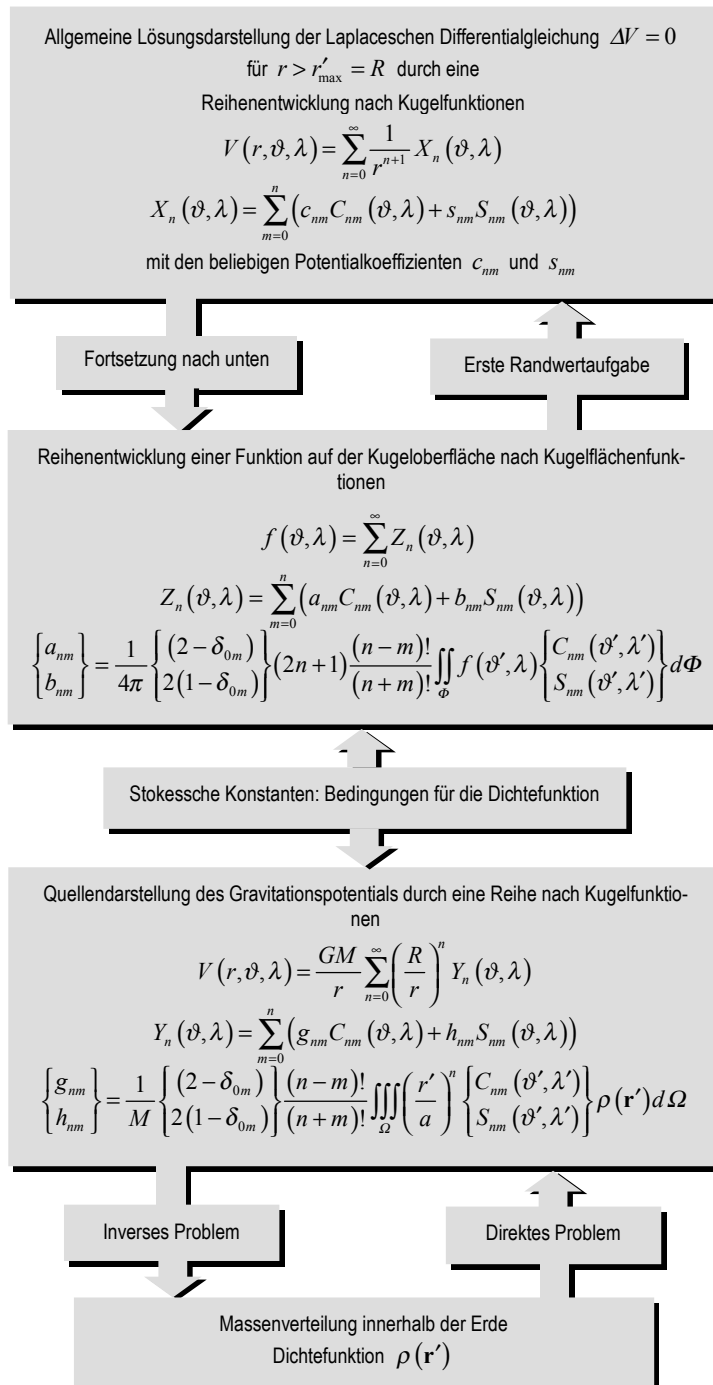


Abb. 5.4: Reihenentwicklungen des Gravitationspotentials und deren strukturellen Zusammenhänge.

In diesem Fall liegt dasselbe System von Basisfunktionen, nämlich die Kugelflächenfunktionen, zur Darstellung der Potentialfunktion vor und im Fall der Eindeutigkeit der Lösung müssen beide Sätze von Potentialkoeffizienten eindeutig ineinander überführbar sein. Man bezeichnet diese Aufgabe als (Erste) Randwertaufgabe, da von einer Information auf einer Randfläche auf die Lösungsparameter der allgemeinen Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung geschlossen wird. Anschaulich handelt es sich hierbei um ein Fortsetzungsproblem nach oben. Auch diese Aufgabe kann als direktes Problem bezeichnet werden. Dieses Problem wird im folgenden näher untersucht werden.

Sind die Potentialkoeffizienten bekannt, beispielsweise durch den vorhin geschilderten Vorgang, so liegt die Frage nahe, ob die Massenverteilung, aus der die Potentialkoeffizienten eindeutig bestimmt werden können, umgekehrt durch ein inverses Lösungsvorgehen eindeutig festgelegt ist. Es wird sich zeigen, daß diese inverse Aufgabe nicht eindeutig lösbar ist. Dieser Sachverhalt wurde bereits als Stokessches Theorem an früherer Stelle erwähnt. Dennoch können gewisse Bedingungen für die Dichtefunktion des gravitierenden Körpers bestimmt werden, ohne eine eindeutige Bestimmung zuzulassen. Dies läuft auf die physikalische Interpretation der Potentialkoeffizienten bzw. auf die Berechnung der Stokesschen Konstanten eines Körpers hinaus. Diese Interpretation hat für das mechanische Verhalten des gravitierenden Körpers Bedeutung. Auch dieser Aspekt soll im folgenden diskutiert werden.

5.5.2 Lösung einer Ersten Randwertaufgabe

5.5.2.1 Lösungsweg

In diesem Abschnitt werden die Integrationskonstanten c_{nm}, s_{nm} berechnet, wenn die Funktion $V(R, \vartheta, \lambda) = f(\vartheta, \lambda)$ auf der Kugeloberfläche Φ_K gegeben ist. Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung lautet nach Gleichung (5.22) mit (5.20):

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n X_n(\vartheta, \lambda),$$

mit der Laplaceschen Kugelflächenfunktion vom Grad n :

$$X_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (c_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + s_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)).$$

Die Bestimmung der Integrationskonstanten gelingt durch den Vergleich der Faktoren der Linearkombination mit den Entwicklungskoeffizienten der Randfunktion. Zu diesem Zweck ist als ersten Schritt die Lösung der Laplace-Gleichung auf die Kugeloberfläche mit dem Radius R einzuschränken. Als zweiten Schritt ist die Randfunktion auf der Kugel in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen anzugeben. In einem dritten Schritt kann dann der Vergleich der Koeffizienten gleicher Kugelflächenfunktionen vorgenommen werden:

- Grenzübergang $\lim_{r \rightarrow R} V(r, \vartheta, \lambda)$,

$$\lim_{r \rightarrow R} V(r, \vartheta, \lambda) = V(R, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^n X_n(\vartheta, \lambda). \quad (5.46)$$

- Entwicklung der Randfunktion $f(\vartheta, \lambda)$,

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv Z(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\vartheta, \lambda), \quad (5.47)$$

mit den Kugelflächenfunktionen vom Grad n ,

$$Z_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)), \quad (5.48)$$

sowie den Entwicklungskoeffizienten a_{nm}, b_{nm} ,

$$\begin{aligned}
 a_{nm} &= \frac{1}{4\pi} (2 - \delta_{0m}) (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') C_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi, \\
 b_{nm} &= \frac{1}{2\pi} (1 - \delta_{0m}) (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') S_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi.
 \end{aligned}
 \tag{5.49}$$

- Durch Gleichsetzen der beiden Funktionen folgt für die gesuchten Potentialeffizienten

$$\begin{pmatrix} c_{nm} \\ s_{nm} \end{pmatrix} = R^{n+1} \begin{pmatrix} a_{nm} \\ b_{nm} \end{pmatrix}.
 \tag{5.50}$$

Die unbekanntenen Faktoren der Linearkombination, c_{nm} und s_{nm} , können somit durch die Koeffizienten a_{nm} , b_{nm} der Entwicklung der bekannten Randfunktion nach Kugelflächenfunktionen (5.49) ausgedrückt werden.

Damit hat man die Lösung einer sog. Ersten Randwertaufgabe bzw. des sog. Dirichlet-Problems gefunden.

5.5.2.2 Eindeutigkeit der Ersten Randwertaufgabe

Die Lösung dieser Randwertaufgabe ist eindeutig: Eine im Außenraum von Ω harmonische Funktion V ist eindeutig durch seinen Verlauf auf der Randfläche Φ (oder auf Φ_k) bestimmt. Der Nachweis gelingt auf einfache Weise, indem man zeigt, daß zwei Lösungen identisch sein müssen, wenn sie auf dem Rand dieselben Werte annehmen:

Zum Beweis nimmt man zwei reguläre Lösungen V_1, V_2 der Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$ an, die auf der Randfläche Φ dieselbe Randfunktion $f(\vartheta, \lambda)$ annehmen,

$$V_1|_{\Phi} = V_2|_{\Phi} = f(\vartheta, \lambda),
 \tag{5.51}$$

und zeigt, daß diese beiden Lösungen identisch sein müssen. Zu diesem Zweck wird die Differenzfunktion gebildet; auf dem Rand nimmt diese Differenzfunktion dann den Wert 0 an,

$$T := V_1 - V_2 \text{ mit der Randbedingung } T|_{\Phi} = 0.
 \tag{5.52}$$

Nach der 1. Greenschen Integralformel für den Außenraum gilt

$$\iiint_{\Omega_a} (T \Delta T + \nabla T \cdot \nabla T) d\Omega_a = - \iint_{\Phi} T \frac{\partial T}{\partial n} d\Phi.
 \tag{5.53}$$

Da die rechte Seite der Integralformel wegen $T = 0$ verschwindet und die Differenzfunktion T im Außenraum harmonisch ist, erhält man

$$\iiint_{\Omega_a} \nabla T \cdot \nabla T d\Omega_a = 0,
 \tag{5.54}$$

bzw., in rechtwinklig kartesischen Koordinaten angeschrieben,

$$\iiint_{\Omega_a} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 d\Omega_a = 0.
 \tag{5.55}$$

Daraus folgt die Bedingung

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (5.56)$$

bzw. die Konstanz der Differenzfunktion im Außenraum, $T = \text{const}$. Die Funktionen V_1 und V_2 sind im Unendlichen regulär, d.h., $V_1|_{\infty} = V_2|_{\infty} = 0$. Dasselbe gilt für die Differenzfunktion, $T|_{\infty} = 0$. Damit ist die Konstante Null und es folgt die Gleichheit der Lösungen V_1 und V_2 .

5.6 Physikalische Interpretation der Potentialkoeffizienten

Die Berechnung der Potentialkoeffizienten g_{nm} und h_{nm} der Quellendarstellung setzt eine bekannte Dichtefunktion im Erdinnern $\rho(\mathbf{r}')$ voraus. Damit scheidet dieses Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten i.a. aus. Nimmt man an, die Potentialfunktion sei auf der Kugeloberfläche in Form einer Funktion bzw. einer daraus abgeleiteten Reihenentwicklung mit den Entwicklungskoeffizienten a_{nm} und b_{nm} gegeben, so kann aber ein Zusammenhang mit den Potentialkoeffizienten der Quellendarstellung hergestellt werden. Die Quellendarstellung lautet auf einer Kugel mit dem Radius R ,

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda), \quad (5.57)$$

mit der Laplaceschen Kugelflächenfunktion vom Grad n ,

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (c_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + s_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)). \quad (5.58)$$

Der Vergleich mit den Entwicklungskoeffizienten a_{nm} und b_{nm} liefert Bedingungen für die Dichtefunktionen,

$$a_{nm} = \frac{GM}{R} g_{nm}, \quad b_{nm} = \frac{GM}{R} h_{nm}. \quad (5.59)$$

Die Potentialkoeffizienten g_{nm} und h_{nm} ergeben sich ja als Volumenintegrale über die Dichtefunktion

$$\begin{cases} g_{nm} \\ h_{nm} \end{cases} = \frac{1}{M} \begin{cases} (2 - \delta_{0m}) \\ 2(1 - \delta_{0m}) \end{cases} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n \begin{cases} C_{nm}(\vartheta', \lambda') \\ S_{nm}(\vartheta', \lambda') \end{cases} \rho(\mathbf{r}') d\Omega. \quad (5.60)$$

Mit den Kugelflächenfunktionen $C_{nm}(\vartheta', \lambda')$ und $S_{nm}(\vartheta', \lambda')$, beispielsweise vollständig bis zum Grad $n = 2$:

$$\begin{aligned} C_{00}(\vartheta', \lambda') &= 1, & C_{10}(\vartheta', \lambda') &= \frac{z}{r'}, & C_{11}(\vartheta', \lambda') &= \frac{x}{r'}, & S_{11}(\vartheta', \lambda') &= \frac{y}{r'} \\ C_{20}(\vartheta', \lambda') &= \frac{1}{2r'^2} (2z^2 - y^2 - x^2), & C_{21}(\vartheta', \lambda') &= \frac{1}{r'^2} 3xz, & S_{21}(\vartheta', \lambda') &= \frac{1}{r'^2} 3yz \\ C_{22}(\vartheta', \lambda') &= \frac{1}{r'^2} 3(x^2 - y^2), & S_{22}(\vartheta', \lambda') &= \frac{1}{r'^2} 6xy. \end{aligned}$$

(5.61)

können die Potentialkoeffizienten g_{nm} und h_{nm} berechnet werden. Beispielsweise ergibt sich für g_{00} ,

$$g_{00} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d\Omega = \frac{M'}{M}, \quad (5.62)$$

mit der Gesamtmasse von Ω ,

$$M' := \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d\Omega. \quad (5.63)$$

Entsprechend erhält man für g_{10} ,

$$g_{10} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \frac{r'}{a} \frac{z}{r'} \rho(\mathbf{r}') d\Omega = \frac{1}{Ma} \iiint_{\Omega} z \rho(\mathbf{r}') d\Omega. \quad (5.64)$$

Setzt man $z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}'$, so erhält man

$$g_{10} = \frac{1}{Ma} \mathbf{e}_z \cdot \iiint_{\Omega} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\Omega = \frac{M'}{Ma} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_O, \quad (5.65)$$

mit dem Ortsvektor des Massenmittelpunktes

$$\mathbf{r}_O := \frac{1}{M'} \iiint_{\Omega} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\Omega. \quad (5.66)$$

Für die Potentialkoeffizienten vollständig bis zum Grad 2 ergeben sich Formeln, die eine Aussage über gewisse mechanische Eigenschaften des gravitierenden Körpers machen. Das Verhältnis der Gesamtmasse des Körpers M' zur Referenzmasse M wird durch den Potentialkoeffizienten g_{00} beschrieben

$$g_{00} = M'/M. \quad (5.67)$$

Die Koordinaten des Massenzentrums, bezogen auf das gewählte körperfeste Koordinatensystem, werden durch die Potentialkoeffizienten g_{10} , g_{11} und h_{11} repräsentiert

$$g_{10} = \frac{M'}{Ma} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}_O, \quad g_{11} = \frac{M'}{Ma} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}_O, \quad h_{11} = \frac{M'}{Ma} \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{r}_O. \quad (5.68)$$

Die statische Abplattung wird durch den Potentialkoeffizienten g_{20} beschrieben

$$g_{20} = \frac{M'}{M^2 a^2} \left(\frac{A+B}{2} - C \right), \quad (5.69)$$

mit den Diagonalelementen A, B und C des Trägheitstensors \mathbf{T} . Die Potentialkoeffizienten g_{21} , h_{21} und h_{22} beschreiben die Deviationsmomente der Hauptträgheitsachsen, bezogen auf das zugrunde liegende körperfeste Koordinatensystem,

$$g_{21} = \frac{M'E}{M^2 a^2}, \quad h_{21} = \frac{M'D}{M^2 a^2}, \quad h_{22} = \frac{M'F}{2M^2 a^2}, \quad (5.70)$$

mit den Nebendiagonalelementen E, D und F des Trägheitstensors \mathbf{T} . Die Äquatorabplattung wird durch den Potentialkoeffizienten g_{22} beschrieben:

$$g_{22} = \frac{M'(B-A)}{4M^2a^2}. \quad (5.71)$$

Die Potentialkoeffizienten können auf diese Weise nicht nur physikalisch interpretiert werden, sondern stellen mit den enthaltenen Größen daneben Bedingungen für die Dichtefunktion dar. Dies veranschaulicht nicht nur die Gesamtmasse des gravitierenden Körpers,

$$M' = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') d\Omega, \quad (5.72)$$

auch die übrigen Größen zeigen diesen Zusammenhang, beispielsweise die Massenzentrumskoordinaten (Abb. 5.5),

$$\mathbf{r}_O = \begin{pmatrix} x_O \\ y_O \\ z_O \end{pmatrix} = \frac{1}{M'} \iiint_{\Omega} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\Omega, \quad (5.73)$$

oder die Elemente des Trägheitstensors.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \Theta - \Theta_{11} & -\Theta_{12} & -\Theta_{13} \\ -\Theta_{12} & \Theta - \Theta_{22} & -\Theta_{23} \\ -\Theta_{13} & -\Theta_{23} & \Theta - \Theta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}. \quad (5.74)$$

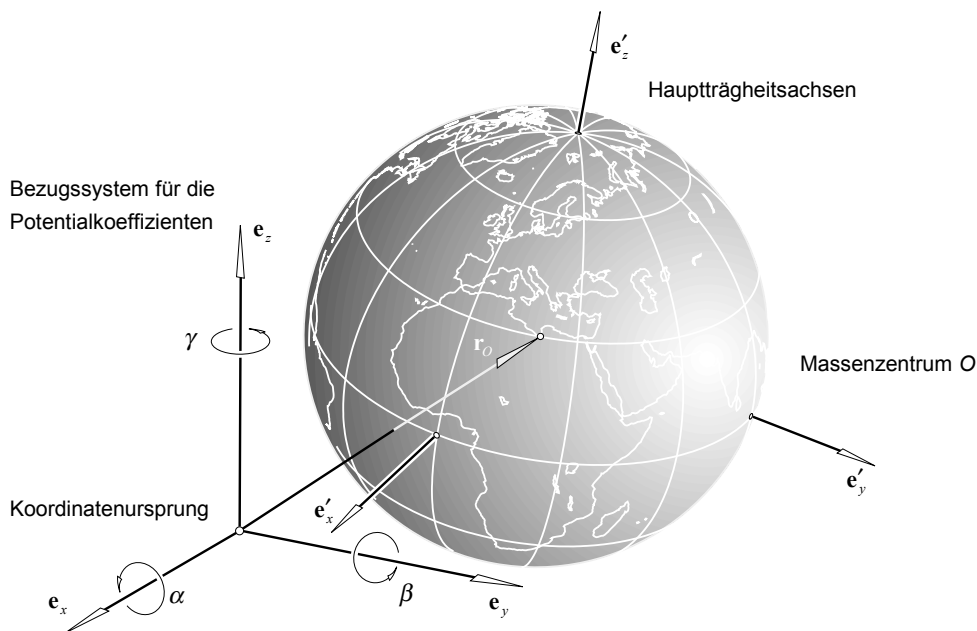


Abb. 5.5: Physikalische Interpretation der Potentialkoeffizienten.

Die Deviationsmomente D, E und F beschreiben die Abweichungen α, β und γ der Hauptträgheitsachsen von den Achsen des zugrunde gelegten körperfesten Koordinatensystems (Abb. 5.5),

$$D = \alpha(C - B), \quad E = \beta(A - C), \quad F = \gamma(B - A). \quad (5.75)$$

Die Hauptträgheitsmomente A, B und C ergeben sich aus:

$$\begin{aligned}
 A &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}') d\Omega, & B &= \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}') d\Omega, \\
 C &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(\mathbf{r}') d\Omega,
 \end{aligned}
 \tag{5.76}$$

und die Deviationsmomente D, E und F erhält man in Abhängigkeit von der Dichtefunktion,

$$\begin{aligned}
 D &= -\iiint_{\Omega} yz \rho(\mathbf{r}') d\Omega, & E &= -\iiint_{\Omega} xz \rho(\mathbf{r}') d\Omega, \\
 F &= -\iiint_{\Omega} xy \rho(\mathbf{r}') d\Omega.
 \end{aligned}
 \tag{5.77}$$

Entsprechende Überlegungen gelten für die Potentialkoeffizienten höheren Grades als 2.

Abschließend seien nochmals die wichtigsten Erkenntnisse zusammengefaßt:

- Die Lösung der ersten Randwertaufgabe, also die Berechnung der Faktoren der Linearkombination der speziellen Lösungen der Laplace-Gleichung aus einer gegebenen Randfunktion ist eindeutig.
- Die Berechnung des Potentials im Außenraum aus der Massenverteilung der Raummasse ist eindeutig (direktes Problem)

$$V(r, \vartheta, \lambda) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{l} d\Omega.
 \tag{5.78}$$

- Die Berechnung der Massenverteilung aus der Potentialfunktion im Außenraum ist nicht eindeutig lösbar (inverses Problem). Jedes Potential im Außenraum einer Raummasse kann von unendlich vielen Massenverteilungen erzeugt werden.
- Die Potentialfunktion im Außenraum gestattet, auf gewisse Symmetrien der Massenverteilung zu schließen (physikalische Interpretation der Potentialkoeffizienten).

5.7 Alternative Darstellungen der Kugelflächenfunktionen

Es gibt alternative Darstellungen der Kugelflächenfunktionen, die für gewisse Anwendungen besser geeignet sind als die im letzten Kapitel eingeführten. Insbesondere die sogenannten vollständig normierten Kugelflächenfunktionen vermeiden die stark unterschiedliche Größe der numerischen Werte der Potentialkoeffizienten und sind deshalb für praktische Anwendungen besser geeignet als die nicht normierten. Komplexe Kugelflächenfunktionen bieten sich dagegen für kompakte Formeldarstellungen und für analytische Betrachtungen an. In diesem Abschnitt werden deshalb einige Formeln zusammengestellt.

5.7.1 Alternative Darstellungen der Kugelflächenfunktionen

Die im letzten Kapitel eingeführten Kugelfunktionsdarstellungen sind i.a. für praktische Anwendungen nicht geeignet. Sie haben den Nachteil, daß die Größe der Potentialkoeffizienten stark mit der Ordnung m und dem Grad n variieren. Der Abschnitt 5.7.1.1 faßt die Formeln der Kapitel 5.2 bis 5.4, ergänzt um einige weitere nützliche Formeln zusammen:

5.7.1.1 Nicht normierte Kugelflächenfunktionen

Quellendarstellung des Gravitationspotentials

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n Y_n(\vartheta, \lambda). \quad (5.79)$$

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$\begin{aligned} Y_n(\vartheta, \lambda) &= \sum_{m=0}^n (c_{nm} Y_{nm}^c(\vartheta, \lambda) + s_{nm} Y_{nm}^s(\vartheta, \lambda)) \\ &= \sum_{m=0}^n (c_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + s_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)) \end{aligned} \quad (5.80)$$

Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m

$$\begin{aligned} C_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_n^m(\cos \vartheta) \cos m\lambda =: Y_{nm}^c(\vartheta, \lambda) \\ S_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_n^m(\cos \vartheta) \sin m\lambda =: Y_{nm}^s(\vartheta, \lambda) \end{aligned} \quad (5.81)$$

Potentialkoeffizienten

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{(2 - \delta_{0m})(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n C_{nm}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega \\ s_{nm} &= \frac{2(1 - \delta_{0m})(n-m)!}{M(n+m)!} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n S_{nm}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega \end{aligned} \quad (5.82)$$

Entwicklung einer Funktion $f(\vartheta, \lambda)$ in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv Y(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (5.83)$$

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (c_{nm} C_{nm}(\vartheta, \lambda) + s_{nm} S_{nm}(\vartheta, \lambda)) \quad (5.84)$$

Reihenoeffizienten

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \frac{1}{4\pi} (2 - \delta_{0m})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') C_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi \\ s_{nm} &= \frac{1}{2\pi} (1 - \delta_{0m})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') S_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi \end{aligned} \quad (5.85)$$

Orthogonalitätsrelationen

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$\iint_{\Phi} Y_n(\vartheta, \lambda) Y_{n'}(\vartheta, \lambda) d\Phi = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{m=0}^n (1 + \delta_{0m}) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (c_{nm}^2 + s_{nm}^2) \delta_{nn'} \quad (5.86)$$

Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m ($\sigma, \sigma' \in \{c, s\}$) :

$$\begin{aligned}
0 > m \leq n: \quad & \iint_{\Phi} Y_{nm}^{\sigma}(\vartheta, \lambda) Y_{n'm'}^{\sigma'}(\vartheta, \lambda) d\Phi = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} \\
m = 0: \quad & \iint_{\Phi} Y_{n0}^{\sigma}(\vartheta, \lambda) Y_{n'0}^{\sigma'}(\vartheta, \lambda) d\Phi = \frac{4\pi}{2n+1} \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} (1 - \delta_{\sigma\sigma'})
\end{aligned} \tag{5.87}$$

Zugeordnete Legendre-Funktionen des Grades n und der Ordnung m

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^{m'}(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \tag{5.88}$$

bzw. mit $t = \cos\vartheta$

$$\int_{t=-1}^1 P_n^m(t) P_n^{m'}(t) dt = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \tag{5.89}$$

oder alternativ

$$\int_0^{\pi} P_n^m(\cos\vartheta) P_n^{m'}(\cos\vartheta) \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{mm'} \tag{5.90}$$

Legendre-Polynome des Grades n

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\vartheta) P_n'(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'} \tag{5.91}$$

Additionstheorem der Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}
P_n(\cos\psi) &= P_n(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\lambda - \lambda')) \\
&= \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (C_{nm}(\vartheta, \lambda) C_{nm}(\vartheta', \lambda') + S_{nm}(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta', \lambda'))
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Im folgenden Abschnitt 5.7.1.2 sind die entsprechenden Formeln wie im Abschnitt 5.7.1.1 angegeben, basierend jedoch auf sog. vollständig normierten Kugelflächenfunktionen, wie sie insbesondere in der physikalischen Geodäsie verwendet werden. Die Potentialkoeffizienten der globalen Erdmodelle sind üblicherweise in dieser Norm gegeben.

5.7.1.2 Vollständig normierte Kugelflächenfunktionen

Quellendarstellung des Gravitationspotentials

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n Y_n(\vartheta, \lambda) \tag{5.93}$$

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$\begin{aligned}
Y_n(\vartheta, \lambda) &= \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \bar{Y}_{nm}^c(\vartheta, \lambda) + \bar{s}_{nm} \bar{Y}_{nm}^s(\vartheta, \lambda)) \\
&= \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{s}_{nm} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda))
\end{aligned} \tag{5.94}$$

Vollständig normierte Kugelflächenfunktion des Grades n und der Ordnung m

$$\begin{aligned}\bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) \cos m\lambda =: \bar{Y}_{nm}^c(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) &= \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) \sin m\lambda =: \bar{Y}_{nm}^s(\vartheta, \lambda)\end{aligned}\quad (5.95)$$

Vollständig normierte Potentialkoeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{c}_{nm} &= \frac{1}{M(2n+1)} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n \bar{C}_{nm}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega \\ \bar{s}_{nm} &= \frac{(1-\delta_{0m})}{M(2n+1)} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n \bar{S}_{nm}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega\end{aligned}\quad (5.96)$$

Entwicklung einer Funktion $f(\vartheta, \lambda)$ in eine Reihe nach vollständig normierten Kugelflächenfunktionen

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv Y(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (5.97)$$

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{s}_{nm} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)) \quad (5.98)$$

Vollständig normierte Reihenoeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{c}_{nm} &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') \bar{C}_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi \\ \bar{s}_{nm} &= \frac{(1-\delta_{0m})}{4\pi} \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') \bar{S}_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi\end{aligned}\quad (5.99)$$

Orthogonalitätsrelationen

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$\begin{aligned}\iint_{\Phi} Y_n(\vartheta, \lambda) Y_{n'}(\vartheta, \lambda) d\Phi &= 4\pi \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm}^2 + \bar{s}_{nm}^2) \delta_{nn'} = 4\pi \sigma_n^2 \delta_{nn'} \\ \text{Gradvarianzen: } \sigma_n^2 &= \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm}^2 + \bar{s}_{nm}^2)\end{aligned}\quad (5.100)$$

Vollständig normierte Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m ($\sigma, \sigma' \in \{c, s\}$)

$$\begin{aligned}0 < m \leq n: \quad \iint_{\Phi} \bar{Y}_{nm}^{\sigma}(\vartheta, \lambda) \bar{Y}_{n'm'}^{\sigma'}(\vartheta, \lambda) d\Phi &= 4\pi \delta_{mm'} \delta_{n'n'} \delta_{\sigma\sigma'} \\ m = 0: \quad \iint_{\Phi} \bar{Y}_{n0}^{\sigma}(\vartheta, \lambda) \bar{Y}_{n'0}^{\sigma'}(\vartheta, \lambda) d\Phi &= 4\pi \delta_{nn'} \delta_{\sigma\sigma'} (1 - \delta_{s\sigma'})\end{aligned}\quad (5.101)$$

Vollständig normierte zugeordnete Legendre-Funktionen des Grades n und der Ordnung m

$$\int_0^{\pi} \bar{P}_n^m(\cos \vartheta) \bar{P}_{n'}^m(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 2(2 - \delta_{m0}) \delta_{nn'} \quad (5.102)$$

bzw. mit $t = \cos \vartheta$

$$\int_{t=-1}^1 \bar{P}_n^m(t) \bar{P}_n^m(t) dt = 2(2 - \delta_{0m}) \delta_{nn'} \quad (5.103)$$

Additionstheorem der vollständig normierten Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(\cos\psi) &= \bar{P}_n(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\lambda - \lambda')) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{C}_{nm}(\vartheta', \lambda') + \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \bar{S}_{nm}(\vartheta', \lambda')) \end{aligned} \quad (5.104)$$

Im Abschnitt 5.7.1.3 sind schließlich die den Abschnitten 5.7.1.1 und 5.7.1.2 entsprechenden Formeln in komplexer Schreibweise zusammengestellt. Komplexe Kugelflächenfunktionen bieten sich insbesondere für kompakte Formeldarstellungen und für analytische Betrachtungen an.

5.7.1.3 Komplexe Kugelflächenfunktionen

Quellendarstellung des Gravitationspotentials

$$V(\mathbf{r}) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (5.105)$$

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=-n}^n \kappa_{nm} Y_{nm}(\vartheta, \lambda) \quad (5.106)$$

Komplexe Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m , für $n \geq 0$ und $-n \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} Y_{nm}(\vartheta, \lambda) &= P_n^m(\cos\vartheta) e^{im\lambda} \\ Y_{n,-m}(\vartheta, \lambda) &= P_n^{-m}(\cos\vartheta) e^{-im\lambda} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\vartheta) e^{-im\lambda} \end{aligned} \quad (5.107)$$

Komplexe Potentialkoeffizienten κ_{nm} , $n \geq 0, -n \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} \kappa_{nm} &= \frac{(-1)^m}{M} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n Y_{n,-m}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega \\ \kappa_{n,-m} &= \frac{(-1)^m}{M} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r'}{a}\right)^n Y_{nm}(\vartheta', \lambda') \rho(\mathbf{r}') d\Omega \end{aligned} \quad (5.108)$$

Entwicklung einer Funktion $f(\vartheta, \lambda)$ in eine Reihe nach komplexen Kugelflächenfunktionen

$$f(\vartheta, \lambda) \equiv Y(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (5.109)$$

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=-n}^n \kappa_{nm} Y_{nm}(\vartheta, \lambda) \quad (5.110)$$

Komplexe Reihenoeffizienten

$$\begin{aligned}\kappa_{nm} &= \frac{2n+1}{4\pi} (-1)^m \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') Y_{n,-m}(\vartheta', \lambda') d\Phi \\ \kappa_{n,-m} &= \frac{2n+1}{4\pi} (-1)^m \iint_{\Phi} f(\vartheta', \lambda') Y_{nm}(\vartheta', \lambda') d\Phi\end{aligned}\quad (5.111)$$

Orthogonalitätsrelationen

Laplacesche Kugelflächenfunktionen des Grades n

$$\iint_{\Phi} Y_n(\vartheta, \lambda) Y_{n'}(\vartheta, \lambda) d\Phi = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n (-1)^m \kappa_{nm} \kappa_{n,-m} \delta_{nn'} \quad (5.112)$$

Komplexe Kugelflächenfunktionen des Grades n und der Ordnung m , für $n \geq 0$ und $-n \leq m \leq n$

$$\iint_{\Phi} Y_{nm}(\vartheta, \lambda) Y_{n',-m}(\vartheta, \lambda) d\Phi = 4\pi \frac{(-1)^m}{2n+1} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \quad (5.113)$$

Additionstheorem der komplexen Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned}P_n(\cos \psi) &= P_n(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\lambda - \lambda')) = \\ &= \sum_{m=-n}^n (-1)^m Y_{nm}(\vartheta, \lambda) Y_{n,-m}(\vartheta', \lambda')\end{aligned}\quad (5.114)$$

5.7.2 Transformation zwischen den verschiedenen Darstellungen

5.7.2.1 Transformation zwischen Legendreschen Funktionen

In der Tab. 5.1 sind die Faktoren zur Umrechnung von zugeordneten Legendreschen Funktionen verschiedener Normierungen zusammengestellt. Zur Unterscheidung werden diese Funktionen auf folgende Weise gekennzeichnet:

Tab. 5.1: Umrechnung zwischen zugeordneten Legendreschen Funktionen unterschiedlicher Normierung

| | $P_n^m(\cos \vartheta)$ | $\tilde{P}_n^m(\cos \vartheta)$ | $\bar{P}_n^m(\cos \vartheta)$ |
|---------------------------------|--|--|--|
| $P_n^m(\cos \vartheta)$ | | $\sqrt{\frac{1}{(2-\delta_{0m})(n-m)!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}$ | $\sqrt{\frac{1}{(2-\delta_{0m})(2n+1)(n-m)!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}}$ |
| $\tilde{P}_n^m(\cos \vartheta)$ | $\sqrt{(2-\delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$ | | $\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$ |
| $\bar{P}_n^m(\cos \vartheta)$ | $\sqrt{(2-\delta_{0m})(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$ | $\sqrt{2n+1}$ | |

- (nicht normierte) zugeordnete Legendresche Funktionen $P_n^m(\cos \vartheta)$,
- normierte zugeordnete Legendresche Funktionen $\tilde{P}_n^m(\cos \vartheta)$,
- vollständig normierte zugeordnete Legendresche Funktionen $\bar{P}_n^m(\cos \vartheta)$.

Die in der ersten Spalte angegebenen zugeordneten Legendreschen Funktionen ergeben sich als Produkte der Funktionen in der ersten Zeile, multipliziert mit den entsprechenden in der Tabelle angegebenen Faktoren.

5.7.2.2 Transformation zwischen Kugelflächenfunktionen

In der Tab. 5.2 sind die Umrechnungsfaktoren für verschiedene Kugelflächenfunktionen zusammengestellt:

- (nicht normierte) Kugelflächenfunktionen $C_{nm}(\vartheta, \lambda), S_{nm}(\vartheta, \lambda)$,
- vollständig normierte Kugelflächenfunktionen $\bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda), \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)$,
- komplexe Kugelflächenfunktionen $Y_{nm}(\vartheta, \lambda), Y_{n,-m}(\vartheta, \lambda)$.

Tab. 5.2: Transformation zwischen verschiedenen Kugelflächenfunktionen

| | $C_{nm}(\vartheta, \lambda), S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ | $\bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda), \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)$ | $Y_{nm}(\vartheta, \lambda), Y_{n,-m}(\vartheta, \lambda)$ |
|--|--|--|---|
| $C_{nm}(\vartheta, \lambda), S_{nm}(\vartheta, \lambda)$ | | $C_{nm} = \alpha_{nm}^{-1} \bar{C}_{nm}$ $S_{nm} = \alpha_{nm}^{-1} \bar{S}_{nm}$ | $C_{nm} = \frac{1}{2} \left(Y_{nm} + (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} Y_{n,-m} \right)$ $S_{nm} = \frac{i}{2} \left(-Y_{nm} + (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} Y_{n,-m} \right)$ |
| $\bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda), \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)$ | $\bar{C}_{nm} = \alpha_{nm} C_{nm}$ $\bar{S}_{nm} = \alpha_{nm} S_{nm}$ | | $\bar{C}_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{2} \left(Y_{nm} + (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} Y_{n,-m} \right)$ $\bar{S}_{nm} = \frac{i\alpha_{nm}}{2} \left(-Y_{nm} + (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} Y_{n,-m} \right)$ |
| $Y_{nm}(\vartheta, \lambda), Y_{n,-m}(\vartheta, \lambda)$ | $Y_{nm} = C_{nm} + iS_{nm}$ $Y_{n,-m} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (C_{nm} - iS_{nm})$ | $Y_{nm} = \alpha_{nm}^{-1} (\bar{C}_{nm} + i\bar{S}_{nm})$ $Y_{n,-m} = \alpha_{nm}^{-1} (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\bar{C}_{nm} - i\bar{S}_{nm})$ | |

Tab. 5.3: Transformation zwischen verschiedenen Entwicklungskoeffizienten

| | c_{nm}, s_{nm} | $\bar{c}_{nm}, \bar{s}_{nm}$ | $\kappa_{nm}, \kappa_{n,-m}$ |
|------------------------------|--|--|---|
| c_{nm}, s_{nm} | | $c_{nm} = \alpha_{nm} \bar{c}_{nm}$ $s_{nm} = \alpha_{nm} \bar{s}_{nm}$ | $c_{nm} = \frac{1}{1 + \delta_{0m}} \left(\kappa_{nm} + (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \kappa_{n,-m} \right)$ $s_{nm} = \frac{1}{1 + \delta_{0m}} \left(\kappa_{nm} - (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \kappa_{n,-m} \right)$ |
| $\bar{c}_{nm}, \bar{s}_{nm}$ | $\bar{c}_{nm} = \alpha_{nm}^{-1} c_{nm}$ $\bar{s}_{nm} = \alpha_{nm}^{-1} s_{nm}$ | | $\bar{c}_{nm} = \frac{1}{\alpha_{nm} (1 + \delta_{0m})} \left(\kappa_{nm} + (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \kappa_{n,-m} \right)$ $\bar{s}_{nm} = \frac{1}{\alpha_{nm} (1 + \delta_{0m})} \left(\kappa_{nm} - (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \kappa_{n,-m} \right)$ |
| $\kappa_{nm}, \kappa_{n,-m}$ | $\kappa_{nm} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} (c_{nm} - i s_{nm})$ $\kappa_{n,-m} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (c_{nm} + i s_{nm})$ | $\kappa_{nm} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} \alpha_{nm} (\bar{c}_{nm} - i \bar{s}_{nm})$ $\kappa_{n,-m} = \frac{1 + \delta_{0m}}{2} \alpha_{nm} (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} (\bar{c}_{nm} + i \bar{s}_{nm})$ | |

Der in den Tabellen verwendete Faktor lautet: $\alpha_{nm} = \sqrt{(2 - \delta_{0m})(2n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$.

5.7.2.3 Transformation zwischen Entwicklungskoeffizienten

Tab. 5.3 enthält eine Zusammenstellung der Umrechnungsfaktoren für die Reihenentwicklung verschiedener Kugelflächenfunktionsentwicklungen:

- (nicht normierte) Entwicklungskoeffizienten c_{nm}, s_{nm}
- vollständig normierte Entwicklungskoeffizienten $\bar{c}_{nm}, \bar{s}_{nm}$,
- komplexe Entwicklungskoeffizienten $\kappa_{nm}, \kappa_{n,-m}$.